2010 年度夏の LA シンポジウム [11]

色付きの点の集まりはいつ超平面によって その色付け通りに分割できるか

戸田貴久*

2010 年 7 月 21 日

概 要

P. Kirchberger は、各点が 2 色のうちの 1 色で（例えば、赤色あるいは青色で）塗られた有限個の点の集まり $X \subseteq \mathbb{R}^d$ に対して、$d+2$ 点以下の任意の部分集合を超平面で色付け通りに分離できるならば、X を超平面で色付け通りに分離できることを示した。本稿ではこの定理をよりカラフルにした定理を示す。

1 はじめに

各点が 2 色のうち 1 色で（例えば、赤色あるいは青色で）塗られた有限集合 $X \subseteq \mathbb{R}^d$ を **（1 つの）超平面でその色付け通りに分離できる**とは、ある超平面が存在して、それに伴われる 2 つの開半空間の一方が赤色で塗られたすべての点を含み、他方が青色で塗られたすべての点を含むときをいう。Kirchberger の定理 [5] によれば、$d+2$ 点以下の任意の部分集合を超平面で色付け通りに分離できるならば、X を超平面で色付け通りに分離できる。

有限集合 $X \subseteq \mathbb{R}^d$ の各点は k (≥ 2) 色のうちの 1 色で塗られているとする。このとき X を**超平面でその色付け通りに分割できる**とは、以下の条件を満たす X と交差しない超平面の集まり $\mathcal{S}$ が存在するときをいう：

1. $\mathcal{S}$ に属するすべての超平面は同色の点同士を分離しない；
2. 異なる色の任意の 2 点は $\mathcal{S}$ に属する超平面により分離できる。

このとき本稿では、$(d+1) \cdot \eta_d(k) + k$ 点以下の X の任意の部分集合を超平面で色付け通りに分割できるならば、X を超平面で色付け通りに分割できることを示す。ただし、$\eta_d(k)$ は

$$\eta_d(k) = \binom{k-2}{0} + \binom{k-2}{1} + \cdots + \binom{k-2}{d}$$

で与えられる定数とする。

本稿とは異なるカラフルな Kirchberger の定理は [1] [6] によって示されている。

*京都大学大学院人間・環境学研究科, toda.takahisa@hw3.ecs.kyoto-u.ac.jp

2　集合の分割に関する基本概念

本節では集合の分割に関する基本概念を導入する。X を非空な有限集合とする。X の互いに素な非空な部分集合の集まり $P=\{C_1,\dots,C_k\}$ で、次の条件：

$$\bigcup\{C_i \mid 1\le i\le k\}=X$$

を満たすものを X の**分割**という。X をこの分割 P の**台**という。個々の要素 C_i をこの分割 P の**成分**といい、これら成分の個数 k を（P の濃度に等しいので）$|P|$ と表す。X の分割 $P=\{C_1,\dots,C_k\}$ と $Q=\{D_1,\dots,D_l\}$ の**重ね合わせ**を

$$P\vee Q=\{C_i\cap D_j \mid 1\le i\le k,\ 1\le j\le l\}\setminus\{\emptyset\}$$

と定める。同様にして、X の分割の集まり $\mathcal{S}$ に対してその重ね合わせ $\bigvee\mathcal{S}$ は定義される。

X の分割 P が 2 元 $a,b\in X$ を**分離する**とは、a と b がそれぞれ P の異なる成分に属するときをいう。X の分割の集まり $\mathcal{S}$ が**飽和している**とは、X のどの 2 元に対してもそれらを分離する分割を $\mathcal{S}$ が持つとき、すなわち $\bigvee\mathcal{S}=\{\{a\} \mid a\in X\}$ を満たすときである。

定義 1 非空な有限集合 X の分割の集まり $\mathcal{P}$ を固定するとき、$\mathcal{P}$ に属する分割の集まりを **$\mathcal{P}$ における分割族**、あるいは **$\mathcal{P}$ 分割パターン**という。

定義 2 $\mathcal{P}$ は非空な有限集合 X の分割の集まりで、飽和しているとする。$\mathcal{P}$ における分割族 $\mathcal{T}$ が、任意の飽和した $\mathcal{P}$ 分割パターン $\mathcal{F}$ に対して $\mathcal{T}\cap\mathcal{F}\neq\emptyset$ を満たすとき、$\mathcal{T}$ を飽和した $\mathcal{P}$ 分割パターンの**横断**という。横断のうち極小なものを**極小横断**という。

命題 2.1 *$\mathcal{P}$ は非空な有限集合 X の分割の集まりで、飽和しているとする。飽和した $\mathcal{P}$ 分割パターンの極小横断は、$\mathcal{P}$ に属する分割のうちある 2 元 $a,b\in X$ を分離するもの全体である。*

証明　$\mathcal{T}$ を飽和した $\mathcal{P}$ 分割パターンの極小横断とする。X の相異なる 2 元 a,b に対して、$\mathcal{P}$ に属する分割のうち a と b を分離するもの全体を $\mathcal{P}_{a\,|\,b}$ と表す。単に $\mathcal{P}_{a\,|\,b}$ と書くとき、a と b は相異なることとする。$\mathcal{P}$ は飽和しているので $\mathcal{P}_{a\,|\,b}$ は非空である。

$\mathcal{T}$ はある $\mathcal{P}_{a\,|\,b}$ $(a,b\in X)$ を含むことを示そう。このために $\mathcal{T}$ はどの $\mathcal{P}_{a\,|\,b}$ も含まないと仮定する。この仮定から、各 $\mathcal{P}_{a\,|\,b}$ に対して $\mathcal{P}_{a\,|\,b}$ に属するが $\mathcal{T}$ には属さない分割を選ぶことができる。こうして選ばれた分割の集まりは飽和しているが、構成から $\mathcal{T}$ と共通の分割を持たない。これは $\mathcal{T}$ が飽和した $\mathcal{P}$ 分割パターンの横断であることに反するので、$\mathcal{T}$ はある $\mathcal{P}_{a\,|\,b}$ を含まなければならない。

ここで $\mathcal{P}_{a\,|\,b}$ は飽和した $\mathcal{P}$ 分割パターンの横断である。実際、$\mathcal{P}$ 分割パターン $\mathcal{F}$ が飽和しているならば、定義から $\mathcal{F}$ は X の任意の 2 元を分離する分割を持っている。特に、$\mathcal{F}$ は 2 元 a, b を分離する分割を持っている。

以上から $\mathcal{T}$ の極小により $\mathcal{T} = \mathcal{P}_{a\,|\,b}$ を得る。 □

3 $\mathbb{R}^d$ における点配置

有限個の点の集まり $X \subseteq \mathbb{R}^d$ は、それらのどの点も通らない超平面によって高々2 つの点の集まりに分けられる。したがって（X と交差しない）1 つの超平面は X の分割を定めるが、任意の X の分割が 1 つの超平面により実現できるとは限らない。

定義 3 X を $\mathbb{R}^d$ における有限個の点の集まりとする。X の通常の意味における分割 P が**1 つの超平面により実現可能**であるとは、$P = \{X\}$ であるか、さもなければ以下の条件を満たす X の部分集合 U_1, U_2 によって $P = \{U_1, U_2\}$ であるときをいう：ある超平面が存在して、それに伴われる *2* つの開半空間のうち一方に U_1 が含まれ、他方に U_2 が含まれる。

記法 1 有限集合 $X \subseteq \mathbb{R}^d$ に対して、*1* つの超平面により実現可能な X の分割全体を $\mathcal{H}(X)$ と表す。また、$\mathcal{H}(X)$ に属する分割のうち、相異なる *2* 点 $a, b \in X$ を分離するもの全体を $\mathcal{H}_{a\,|\,b}(X)$ で表す。

本節の目的は、飽和した $\mathcal{H}(X)$ 分割パターンの極小横断の濃度の最大値を求めることである。

次の命題は [3] などにおいて示されている。

命題 3.1 $\mathbb{R}^d$ において $k\ (\geq 1)$ 点が配置されているとき、*1* つの超平面により実現可能な分割は高々

$$\phi_d(k) = \binom{k-1}{0} + \binom{k-1}{1} + \cdots + \binom{k-1}{d}$$

個ある。特に、k 点が一般の位置にあるときちょうど $\phi_d(k)$ 個ある。

命題 2.1 から、飽和した $\mathcal{H}(X)$ 分割パターンの極小横断は、$\mathcal{H}(X)$ に属する分割のうち、ある 2 点 $a, b \in X$ を分離するもの全体であった。X が一般の位置にある点からなるとき、その逆が成り立つ。

命題 3.2 X を $\mathbb{R}^d$ において一般の位置にある $k\ (\geq 2)$ 個の点の集まりとする。*1* つの超平面により実現可能な X の分割のうち、相異なる *2* 点 $a, b \in X$ を分離するもの全体 $\mathcal{H}_{a\,|\,b}(X)$ は飽和した $\mathcal{H}(X)$ 分割パターンの極小横断である。

証明　$\mathcal{H}_{a\,|\,b}(X)$ は極小横断でないと仮定する。少なくとも $\mathcal{H}_{a\,|\,b}(X)$ は横断だからある極小横断 $\mathcal{T}$ を真に含む。命題 2.1 から、$\mathcal{T}$ はある 2 点 $c, d \in X$ に対して $\mathcal{H}_{c\,|\,d}(X)$ と表される。このとき a, b, c, d のうち少なくとも 3 つは相異なる点である。X は一般の位置にある点の集まりなので、2 点 c, d のうち少なくとも 1 点は a と b で張られる直線上にない。したがって $\mathcal{H}_{c\,|\,d}(X)$ に属すが $\mathcal{H}_{a\,|\,b}(X)$ に属さない分割が存在することになる。しかし、これは $\mathcal{H}_{a\,|\,b}(X)$ が $\mathcal{H}_{c\,|\,d}(X)$ を含むことに反する。ゆえに、$\mathcal{H}_{a\,|\,b}(X)$ は極小横断である。 □

定義 4 X を $\mathbb{R}^d$ において一般の位置にある k (≥ 2) 個の点の集まりとする。飽和した $\mathcal{H}(X)$ 分割パターンの極小横断の濃度の最小値を $\tau(X)$ とする。さらに、*2* つのパラメータ d, k に対して

$$\tau_d(k) := \min\left\{\tau(X)\,|\,X \text{ は } \mathbb{R}^d \text{ 上で一般の位置にある } k \text{ 点集合}\right\}$$

と定める。

命題 3.3 X を $\mathbb{R}^d$ において一般の位置にある k (≥ 2) 個の点の集まりとする。飽和した $\mathcal{H}(X)$ 分割パターンの極小横断は少なくとも

$$\binom{k-2}{0} + \binom{k-2}{1} + \cdots + \binom{k-2}{d-1}$$

個の分割からなる。

証明　$\mathcal{T}$ を飽和した $\mathcal{H}(X)$ 分割パターンの極小横断とする。命題 2.1 から、$\mathcal{T}$ は 1 つの超平面により実現される X の分割のうち、ある 2 点 $a, b \in X$ を分離するもの全体 $\mathcal{H}_{a\,|\,b}(X)$ である。この 2 点 a, b を固定し $X_a := X \setminus \{a\}$ と表す。X の分割 $P \in \mathcal{H}(X)$ を X_a に制限したものを $P|_{X_a}$ とせよ。

$$P|_{X_a} = \{C \cap X_a\,|\,C \text{ は分割 } P \text{ の成分 }\} \setminus \{\emptyset\}$$

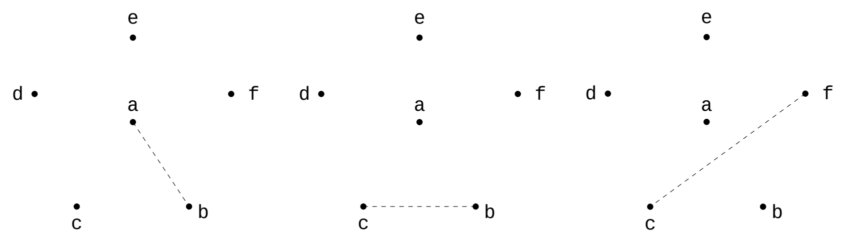
明らかに $P|_{X_a}$ は 1 つの超平面により実現できる X_a の分割である。逆に、1 つの超平面により実現できる X_a の分割はこのようにして得られる。ゆえに、

$$\mathcal{H}(X_a) = \{P|_{X_a}\,|\,P \in \mathcal{H}(X)\}$$

が成り立つ。

各 $R \in \mathcal{H}(X_a)$ に対して $R = P|_{X_a}$ を満たす $P \in \mathcal{H}(X)$ は高々2個である。実際、$R = \{U_1, U_2\}$ と表すとき $P := \{U_1 \cup \{a\}, U_2\}$ または $P' := \{U_1, U_2 \cup \{a\}\}$ のいずれかしかない。点 b は U_1 か U_2 のどちらか一方に属するので、P と P' のうち一方は a と b を分離し、他方は a と b を分離しないことに注意されたい（別の言い方をすれば、一方は $\mathcal{T}$ に属し、他方は $\mathcal{T}$ に属さない）。

相異なる 2 元 $P, P' \in \mathcal{H}(X)$ で $P|_{X_a} = P'|_{X_a}$ を満たすもののうち、a と b を分離する方（すなわち、$\mathcal{T}$ に属する方）をすべて $\mathcal{H}(X)$ から除去しよう。



(a) (b) (c)

図 1: 正五角形の頂点 b, c, d, e, f とその中心点 a とからなる 6 点集合を X とする。飽和した $\mathcal{H}(X)$ 分割パターンの極小横断の濃度の最小値を求めるには、対称性から (a) a と b の分離、(b) b と c の分離、(c) c と f の分離の 3 通りだけ調べれば十分である。(a) のときは 6 個、(b) のときは 6 個、(c) のときは 8 個なので $\tau(X) = 6$ となる。一方、$\phi_2(6) - \phi_2(5) = 5$ となる。

すると、その結果と $\mathcal{H}(X_a)$ を 1 対 1 に対応づけることができる。以上の考察から次の不等式：

$$|\mathcal{H}(X)| - |\mathcal{H}(X_a)| \leq |\mathcal{T}|$$

を得る。X および X_a はともに一般の位置にある点の集まりなので、それぞれ $|X| = \phi_d(k)$ と $|X_a| = \phi_d(k-1)$ を満たす。

$$\begin{aligned}\phi_d(k) - \phi_d(k-1) &= \sum_{i=0}^{d} \left\{ \frac{k-1}{k-i-1}\binom{k-2}{i} - \binom{k-2}{i} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{d} \binom{k-2}{i-1}\end{aligned}$$

から命題は示された。 □

$\tau(X)$ は $\binom{k-2}{0} + \binom{k-2}{1} + \cdots + \binom{k-2}{d-1}$ に一致するとは限らない（図 1)。上の命題から少なくとも次の不等式

$$\binom{k-2}{0} + \binom{k-2}{1} + \cdots + \binom{k-2}{d-1} \leq \tau_d(k)$$

が成り立つことが分かるが、実は等号が成立する：

命題 3.4

$$\tau_d(k) = \binom{k-2}{0} + \binom{k-2}{1} + \cdots + \binom{k-2}{d-1}$$

証明 $\mathbb{R}^d$ において一般の位置にある k (≥ 2) 個の点の集まり X を任意にとる。a と b は X に属する相異なる 2 点とし、$X_a := X \setminus \{a\}$ と表す。1 つの超平面により実現可能な X の分割のうち、この 2 点 a, b を分離するもの全体を $\mathcal{H}_{a\,|\,b}(X)$ と表す。各 $P \in \mathcal{H}_{a\,|\,b}(X)$ に対して、h_P はこの分割 P を実現す

る超平面としよう。このとき 2 点 a, b を結ぶ線分と h_P はちょうど 1 点で交わる。これらの交点のうち最も b に近い点と b に挟まれた線分上の点は無限にある。したがって、そのうちの 1 点 c を選んで $Y := (X \setminus \{a\}) \cup \{c\}$ が一般の位置にあるようにできる。

点集合 Y は、その構成から明らかに以下の条件を満たす: 2 点 c, b を分離する任意の分割 $P \in \mathcal{H}_{c\,|\,b}(Y)$ に対して、2 点 c, b を分離しない分割 $P' \in \mathcal{H}(Y)$ で $P|_{Y_c} = P'|_{Y_c}$ を満たすものがある。したがって、命題 3.3 の証明から $\mathcal{H}_{c\,|\,b}(Y)$ の濃度は $\phi_d(k) - \phi_d(k-1)$ に等しい。よって本命題が示された。 □

定義 5 X を $\mathbb{R}^d$ において一般の位置にある k (≥ 2) 個の点の集まりとする。飽和した $\mathcal{H}(X)$ 分割パターンの極小横断の濃度の最大値を $\eta(X)$ とする。さらに、2 つのパラメータ d, k に対して

$$\eta_d(k) = \max\left\{\eta(X) \,|\, X \text{ は } \mathbb{R}^d \text{ 上で一般の位置にある } k \text{ 点集合}\right\}$$

と定める。

命題 3.5

$$\tau_d(k) + \eta_d(k) = \phi_d(k)$$

証明 X は $\mathbb{R}^d$ において一般の位置にある k 点集合で $\tau(X) = \tau_d(k)$ を満たすものとする（命題 3.4 から存在する）。このとき X の 2 点 a, b で $\mathcal{H}_{a\,|\,b}(X)$ の濃度がちょうど $\tau_d(k)$ となるものがある。P は $\mathcal{H}_{a\,|\,b}(X)$ に属する分割とし、h_P はこの分割を実現する超平面とする。$\mathbb{R}^d$ を拡張した d 次元射影空間において、h_P に対応する射影超平面の補集合に座標を入れて $\mathbb{R}^d$ を作る。この $\mathbb{R}^d$ に X は含まれているが、もとの $\mathbb{R}^d$ における点配置とは異なっていることに注意されたい。したがって新に構成した $\mathbb{R}^d$ において、1 つの超平面により実現可能な X の分割のうち、2 点 a, b を分離するもの全体を $\mathcal{H}'_{a\,|\,b}(X)$ と表す。$\mathcal{H}'_{a\,|\,b}(X)$ の濃度は、その構成から、もとの $\mathbb{R}^d$ において $\mathcal{H}_{a\,|\,b}(X)$ に属する分割のうち 2 点 a, b を分離しない分割の個数に等しい。$\tau_d(k)$ の最小性から、$\eta_d(k) = |\mathcal{H}'_{a\,|\,b}(X)| = \phi_d(k) - \tau_d(k)$ を得る。 □

系 3.6

$$\eta_d(k) = \binom{k-2}{0} + \binom{k-2}{1} + \cdots + \binom{k-2}{d}$$

命題 3.7 X を $\mathbb{R}^d$ 上の k (≥ 2) 個の点の集まりとする。飽和した $\mathcal{H}(X)$ 分割パターンの極小横断は高々 $\eta_d(k)$ 個の分割からなる。

証明 各分割 $P \in \mathcal{H}(X)$ に対して、P を実現する超平面 h_P を 1 つとる。十分小さい $\epsilon > 0$ をとれば、各点 $a \in X$ に対して中心 a で半径 ϵ の開球 $B_\epsilon(a)$ は

すべての h_P $(P \in \mathcal{H}(X))$ と交差しないようにできる。各点 a を開球 $B_\epsilon(a)$ 内で移動させて、X が一般の位置にあるようにできることを示せば十分である。

一般の位置にある X の部分集合のうち極大なものをとり、これを Y と表す。$X = Y$ ならば何も示すべきことはないので Y は X の真部分集合として良い。1 点 $a \in X \setminus Y$ を任意にとる。$|Y| \geq d$ としよう（$|Y| < d$ の場合は同様にして示すことができるので省略する）。Y の点で張ることのできる超平面は高々有限個なので、$B_\epsilon(a)$ 上の点のうちこれらの超平面のどれとも交差しないものがある。したがって、こういった点の場所まで点 a を移動させれば、$Y \cup \{a\}$ が一般の位置にあるようになる。この方法で、X 自身が一般の位置にあるようにできる。 □

4 色付けされた点の集まりの超平面による分割

定義 6 X を $\mathbb{R}^d$ における有限集合とし、P を X の通常の意味における分割とする。**超平面によって P の通りに X を分割ができる**とは、*1* つの超平面により実現される X の分割の集まり $\mathcal{S}$ が存在して、P が $\mathcal{S}$ の重ね合わせとなるときをいう。

有限集合 X の各点は k 色のうちの 1 色で塗られているとする。この色付けによって X の分割が定まるので、超平面によってその色付け通りに X を分割できるとは、以下の条件を満たす X と交差しない超平面の集まり $\mathcal{S}$ が存在することに等しい：

1. $\mathcal{S}$ に属するすべての超平面は同色の点同士を分離しない；
2. 異なる色の任意の 2 点は $\mathcal{S}$ に属する超平面により分離できる。

次の補題は Kirchberger の定理を少し変えたものである。その証明はほとんど [2] [7] におけるものと同じであるが、超平面を $\mathbb{R}^d$ 上の点とみなす方法は [4] などで幾何学的変換 $\mathcal{D}_o$ として知られている。

補題 4.1 X は $\mathbb{R}^d$ において原点 o を含む有限集合で、各点は 2 色のうちの 1 色で塗られているとする。もし原点 o と任意の $d+1$ 個以下の点とからなる X の部分集合を 1 つの超平面で色付け通りに分離できるならば、X は *1* つの超平面でその色付け通りに分離できる。

証明　X の各点は赤色あるいは青色で塗られているとする。原点 o は赤色に塗られていると仮定しても一般性は失われない。$X \setminus \{o\}$ の点 $a = (a_1, \ldots, a_d)$ が赤色で塗られているならば

$$I_a := \left\{ (\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^d \mid \sum_1^d \lambda_i a_i < 1 \right\}$$

とせよ。もし青色で塗られているならば

$$J_a := \left\{ (\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^d \,|\, \sum_1^d \lambda_i a_i > 1 \right\}$$

とせよ。

h を原点 o を通らない任意の超平面とする。このとき h は $\sum_{i=1}^d \lambda_i x_i = 1$ と一意に表示される。h に伴われる 2 つの開半空間のうち一方が点 a と原点 o を同時に含むことと、$\sum_{i=1}^d \lambda_i a_i < 1$ が成り立つこと（すなわち $\lambda \in I_a$）は同値である。また、h に伴われる 2 つの開半空間のうち一方が点 a を含み、他方が原点 o を含むことと、$\sum_{i=1}^d \lambda_i a_i > 1$ が成り立つこと（すなわち $\lambda \in J_a$）は同値である。以上の観察から

$$\mathcal{K} = \{ I_a \,|\, a \text{ は赤色で塗られた } X \text{ の点 } \} \cup \{ J_a \,|\, a \text{ は青色で塗られた } X \text{ の点 } \}$$

のうち任意の $d+1$ 個以下の開半空間の共通部分は非空である。よってヘリーの定理から、すべての開半空間の共通部分 $\bigcap \mathcal{K}$ は非空である。この共通部分に属する点 $(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ に対して定まる超平面 $\sum_{i=1}^d \lambda_i x_i = 1$ は X を色付け通りに分割する。 $\square$

点集合 X を平行移動すると任意の点を原点 o にできるから、上の補題は次のように言うことができる :「任意に固定された 1 点とその他の任意の $d+1$ 個以下の点とからなる X の部分集合を 1 つの超平面で色付け通りに分離できるならば、X は 1 つの超平面で色付け通りに分離できる」。

定理 4.2 X は $\mathbb{R}^d$ における有限個の点の集まりで、各点は k 色のうちの 1 色で塗られているとする。もし $(d+1) \cdot \eta_d(k) + k$ 点以下の X の任意の部分集合を超平面で色付け通りに分割できるならば、X は超平面で色付け通りに分割できる。

証明　k 個の色を 1 番から k 番まで任意に番号づけする。i 番目の色から代表点 y_i を選び、それら代表点の全体を $Y := \{y_i \,|\, 1 \leq i \leq k\}$ と表す。Q を 1 つの超平面により実現される Y の分割とするとき、Q を拡張して X の（通常の意味での）分割 $\widehat{Q}$ を与える仕方を以下に導入する : X の各点 p に対して p が i 番目の色をもつならば y_i が属するのと同じ Q の成分に p を追加していく。こうして分割 Q の台が X になるまで拡大する。

本定理の対偶を示すために、X を超平面によってその色付け通りに分割できないと仮定せよ。$\mathcal{H}(Y)$ に属する分割 Q で、その拡張 $\widehat{Q}$ が $\mathcal{H}(X)$ に属さないもの全体を $\mathcal{T}$ と表す。

$$\mathcal{T} := \left\{ Q \in \mathcal{H}(Y) \,|\, \widehat{Q} \notin \mathcal{H}(X) \right\}$$

$\mathcal{T}$ は飽和した $\mathcal{H}(Y)$ 分割パターンの横断になることを示そう。もしそうでないならば、飽和した $\mathcal{H}(Y)$ 分割パターン $\mathcal{F}$ で $\mathcal{T}$ と互いに素なものがある。し

たがって、その拡張 $\widehat{\mathcal{F}} := \left\{\widehat{Q} \,|\, Q \in \mathcal{F}\right\}$ は $\mathcal{H}(X)$ に含まれる。$\mathcal{F}$ は飽和しているので、超平面によってその色付け通りに X を分割できることになる。しかしこれは仮定に反する。

この横断 $\mathcal{T}$ が極小でないならば、それに含まれる極小なものを $\mathcal{T}$ とせよ。すると $|\mathcal{T}| \leq \eta_d(k)$ が成り立つ。

横断 $\mathcal{T}$ に属する分割 Q は $\widehat{Q} \notin \mathcal{H}(X)$ を満たすのであった。したがって補題 4.1 から、Y に属する 1 点 y_i を固定するとき、各 $Q \in \mathcal{T}$ に対して X の高々$d+1$ 個の点の集まり Z_Q が存在して 1 つの超平面によって $\widehat{Q}$ の通りに $Z_Q \cup \{y_i\}$ を分割できない。ゆえに $Z := Y \cup (\bigcup_{Q \in \mathcal{T}} Z_Q)$ とすれば、Z は超平面によって色付け通りに分割できない。$|Z| \leq (d+1) \cdot \eta_d(k) + k$ から、定理が導かれた。 □

参考文献

[1] J.L. Arocha I. Bárány J. Bracho R. Fabila L. Montejano, 'Very Colorful Theorems', *Discrete and Computational Geometry* 42 (2009) 142–154.

[2] L. Danzer, B. Grünbaum V. Klee, 'Helly's theorem and its relatives', Convexity (ed. V.L. Klee), Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 7 (American Mathematical Society, Providence, RI, 1963) 101–180.

[3] E.F. Harding, 'The Number of Partitions of A Set of N Points in k Dimensions Induced by Hyperplanes', Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society Series 2 (Cambridge University Press, 1967) 285–289.

[4] H. Edelsbrunner, *Algorithms in combinatorial geometry* (Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 1987).

[5] P. Kirchberger, 'Über Tschebyscheffsche Annäherungsmethoden', *Math. Ann.* 57 (1903) 509–540.

[6] A. Pór, Diploma Thesis, Eötvös University, Budapest (1998)

[7] H. Rademacher I.J. Schoenberg, 'Helly's theorem on convex domains and Tschebycheff's approximation problem', Canad. J. Math. 2 (1950) 245–256.

[8] M. Shimrat, 'Simple proof of a theorem of P. Kirchberger', *Pacific J. Math.* vol. 5 num. 3 (1955) 361–362.