2 分割のなす分離族の数え上げ

戸田貴久*　　Ivo Vigan†

2012 年 1 月 30 日

1 はじめに

集合 S の **2 分割**とは、高々 2 つの成分からなる集合分割、すなわち $\{S\}$、あるいは S の 2 つの非空部分集合の集まり $\{U, V\}$ で $U \cap V = \emptyset$ かつ $U \cup V = S$ を満たすものである。S の 2 分割の集まり $\mathcal{F} = \{P_1, \ldots, P_m\}$ が**分離族（分離系）**をなすとは、S の任意の 2 元に対してある 2 分割 $P_i \in \mathcal{F}$ で 2 元を別々の成分に含むものが存在するときをいう。

例 1 $S = \{1, 2, 3, 4\}$ とせよ。次で与えられる 2 分割

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \{\{1,2\},\{3,4\}\}, & Q_1 &= \{\{1\},\{2,3,4\}\}, \\
P_2 &= \{\{1,3\},\{2,4\}\}, & Q_2 &= \{\{1,2\},\{3,4\}\}, \\
& & Q_3 &= \{\{1,2,3\},\{4\}\}.
\end{aligned}
$$

に対して、$\{P_1, P_2\}$ と $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$ はともに分離族をなす。

分離族は以下のような探索問題に現れる。集合 S とその 2 分割の集まり $\mathcal{F} = \{P_1, \ldots, P_m\}$ が与えられるとする。S の中から元 x を探し出したい。このために「x は $P_i \in \mathcal{F}$ のどちらの成分にあるか？」と質問することができる。質問には必ず正しい答えが返ってくるものとする。この設定において、一連の質問により S に属するいかなる元も特定できることは、$\mathcal{F}$ が分離族をなすことと同値である。

探索問題を形式的に扱った最初の人は Rényi [7] である。ただし、Rényi は、2 分割でなく特徴関数を質問とみなした点で上と少しだけ扱いが異なっている。すなわち、集合 S と特徴関数の集まり（あるいは、S の部分集合の集まり）により形式化がなされ、特徴関数 $f\colon S \mapsto \{0, 1\}$ は「$f(x) = 1$ であるか？」という質問を表す。特徴関数のなす分離族や集合のなす分離族の概念（両者は等価な概念）が導入され、分離族のサイズを求める組合せ問題などが研究されてきた（ [1], [4], [5]）。

本稿では、部分集合 U とその補集合 $S \setminus U$ は同じ質問を意味するものとして扱いたいので、2 分割のなす分離族を扱う。単に分離族と呼ぶ場合、2 分割のなす分離族を表すものとする。

任意に固定された台集合上には様々な分離族があり、それらの個数を数え上げることは興味深い問題である。本稿では、n 要素集合におけるサイズ m の分離族を数え上げる。

本稿は以下のように構成されている。第 2 節で、2 分割の組に行列表現を与える。第 3 節で、分離族の個数を分離族のサイズに関する和として数え上げる。第 4 節で、分離族の個数を台集合のサイズに関する和として数え上げる。

2 行列表現

本節では、2 分割の組に対する行列表現を導入する。この表現方法は、以降の節における数え上げの基礎となる。

本稿を通して、特に指示のない限り $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ と仮定する。

定義 1 S の 2 分割 P に対して、そのベクトル表示

*京都大学大学院人間・環境学研究科
†Department of Computer Science, City University of New York

$b(P)$ を、第 i 成分が

$$b_i(P) = \begin{cases} 1 & P \text{ が } 1 \text{ と } i \text{ を分けるとき} \\ 0 & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

で与えられる長さ n のベクトルとして定義する。そのとき、2分割の m 組 $P = (P_1, \ldots, P_m)$ は、第 j 列ベクトルが $b(P_j)$ の $n \times m$ 行列に対応する。この行列を M_P で表す。

簡単のため、成分が0か1であるベクトル、行列をそれぞれ $(0,1)$ **ベクトル**、$(0,1)$ **行列**と呼ぶ。

2分割の集まりではなく、2分割の組（すなわち、2分割を重複を許して並べたもの）に対して行列表現が定まることに注意されたい。以降、2分割からなる集まりを $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ など、2分割からなる組を P, Q などと表して区別する。

例 2 $S = \{1, 2, 3, 4\}$ とせよ。例 *1* で与えられた2分割からなる組 $P = (P_1, P_2)$ と $Q = (Q_1, Q_2, Q_3)$ に対して、対応する行列は

$$M_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

である。

以下の補題はただちに得られるので証明を省くが、ちょうど1つの成分 S からなる分割 $\{S\}$ も2分割と呼ばれることに注意されたい。

補題 2.1 S の2分割の m 組全体とサイズ $n \times m$ の $(0,1)$ 行列で第1行目がすべて0からなるものの全体との間に全単射が存在する。

補題 2.2 $\mathcal{P}$ を S の2分割の集まりとし、その元を任意の順序で並べたものを P とせよ。このとき、$\mathcal{P}$ が S に対する分離族をなすことと、M_P が相異なる行ベクトルからなることは同値である。

証明 任意の $i, j \in S$ に対して、i と j を分ける2分割が $\mathcal{P}$ に存在することと、M_P の第 i 行ベクトルと第 j 行ベクトルが異なることが同値である。この観察からただちに補題を得る。 □

命題 2.3 n 要素集合に対する分離族の最小サイズは $\lceil \log_2 n \rceil$ である。

証明 分離族の最小サイズ m は少なくとも $\lceil \log_2 n \rceil$ である。なぜなら、長さ m の $(0,1)$ ベクトルは 2^m 通りしかないので、サイズ $n \times m$ の $(0,1)$ 行列が相異なる行ベクトルからなるためには、$n \leq 2^m$ を満たさなければならない。ゆえに、$\lceil \log_2 n \rceil \leq m$ を得る。

逆に、長さ $\lceil \log_2 n \rceil$ の相異なる $(0,1)$ 行ベクトルは $2^{\lceil \log_2 n \rceil}$ 個ある。そのうち、$n \leq 2^{\lceil \log_2 n \rceil}$ より、第1行がゼロベクトルで第2から第 n 行ベクトルが非ゼロで相異なるようにできる。したがって、$m \leq \lceil \log_2 n \rceil$ を得る。 □

他方、n 要素集合に対する分離族の最大サイズは 2^{n-1} である。なぜならば、最大サイズの分離族は可能な2分割をすべて持っているからである。

3 分離族の数え上げ：結果１

本節では、n 要素集合上でサイズ m の分離族の個数を m に関する和として導く。

m 要素集合を i 個の非空部分集合に分割する方法の数を $\left\{ {m \atop i} \right\}$ で表す。この数は、**第** *2* **種スターリング数**として知られている（[3, §6.1]）。

補題 3.1 i 個の記号から、各記号を少なくとも1回は選びながら、重複を許して m 個並べる方法の数は $i! \left\{ {m \atop i} \right\}$ 通りである。

証明 長さ m の文字列において、相異なる m 箇所の位置を m 個のものとみなすとき、これら m 個のものの集まりを i 個の非空部分集合に分割する方法の数は $\left\{ {m \atop i} \right\}$ 通りある。もし分割の成分を区別するならば $i! \left\{ {m \atop i} \right\}$ 通りである。各分割は、明らかに、数え上げたい記号の並びに対応している。 □

n 要素集合の上のサイズ i の分離族の個数を $\tau_{n,i}$ で表す。

補題 3.2 $2 \le n$ と $1 \le m \le 2^{n-1}$ の任意の数 n と m に対して、等式

$$\sum_{i=1}^{m} i! \left\{ {m \atop i} \right\} \tau_{n,i} = (2^m - 1)(2^m - 2) \cdots (2^m - n + 1)$$

が成立する。

証明 $m < \lceil \log_2 n \rceil$ のとき、右辺は 0 である。さらに命題 2.3 から $\tau_{n,m} = 0$、したがって左辺も 0 である。$m \ge \lceil \log_2 n \rceil$ の場合を示す。サイズ $n \times m$ の $(0,1)$ 行列で、第 1 行目がすべて 0 で、相異なる行ベクトルからなるものを 2 通りの異なる方法で数え上げてみよう。

最初の方法では、相異なる行ベクトルを順番に並べていき、所望の行列を構成する。長さ m の $(0,1)$ 行ベクトルは、ゼロベクトルを除けば、$2^m - 1$ 通りある。そのうち $n-1$ 個を選び、第 2 行目から第 n 行目まで並べる方法の数は、補題の等式の右辺で与えられる。

もう一方の方法では、所望の行列をそれに現れる相異なる列ベクトルの数 i で場合分けする。補題 2.1 と 2.2 から、数 i の場合に該当する行列は、サイズ i の分離族において、各 2 分割を少なくとも 1 回は選びながら、重複を許して m 個並べたものである。補題 3.1 から、$\tau_{n,i} \times i! \left\{ {m \atop i} \right\}$ を得る。各場合の数を足し合わせて左辺を得る。

上の 2 通りの数え上げの結果は一致するので、補題の等式を得る。 □

$x(x-1)\cdots(x-m+1)$ を展開したときの x^i の係数の絶対値を $\left[{m \atop i} \right]$ で表す。この数は**符号なし第 *1* 種スターリング数**と呼ばれている ([3, §6.1])。

定理 3.3 $2 \le n$ と $1 \le m \le 2^{n-1}$ の任意の数 n と m に対して、n 要素集合の上のサイズ m の分離族の個数 $\tau_{n,m}$ は

$$\tau_{n,m} = \frac{(n-1)!}{m!} \sum_{i=1}^{m} (-1)^{m-i} \left[{m \atop i} \right] \binom{2^i - 1}{n-1}$$

で与えられる。

証明 スターリング数の反転公式（[2, §3.1]）によって次が成立する：任意の数列 $\{a_i\}_{1 \le i \le n_0}$ と $\{b_i\}_{1 \le i \le n_0}$ が $b_m = \sum_{i=1}^{m} \left\{ {m \atop i} \right\} a_i$ を満たすならば、$a_m = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{m-i} \left[{m \atop i} \right] b_i$ を満たす。これを補題 3.2 に適用して、定理を得る。 □

命題 3.4 n 要素集合に対する最小サイズの分離族の個数は

$$\frac{(n-1)!}{\lceil \log_2 n \rceil !} \binom{2^{\lceil \log_2 n \rceil} - 1}{n-1}$$

で与えられる。

証明 定理 3.3 において、$m = \lceil \log_2 n \rceil$ として計算する。変数 i が $1 \le i < \lceil \log_2 n \rceil$ のとき、$2^i < n$ したがって $\binom{2^i - 1}{n-1} = 0$ となるので、命題の数が得られる。 □

この数はスイッチング理論における n 状態機械の状態割り当ての数として知られている（[6, chap. 12]）。

4 分離族の数え上げ：結果 2

本節では、n 要素集合上でサイズ m の分離族の個数を n に関する和として導く。

n 要素集合の上のサイズ m の分離族のうち、ちょうど 1 つの成分からなる分割 $\{S\}$ を持たないものの個数を $\sigma_{n,m}$ と表す。

補題 4.1 $2 \le n$ と $2 \le m \le 2^{n-1}$ の任意の数 n と m に対して、$\sigma_{n,m} + \sigma_{n,m-1} = \tau_{n,m}$ が成立する。

証明 $\tau_{n,m}$ は、ちょうど 1 つの成分 S からなる分割 $\{S\}$ を含んでもよい分離族の個数だったので、含まない場合と含む場合に分けられる。前者の分離族は、定義により、$\sigma_{n,m}$ 通りある。後者の分離族は、$\{S\}$ を取り除くことで、サイズ $m-1$ の分離族で $\{S\}$ を含まないものの個数 $\sigma_{n,m-1}$ と一致する。ゆえに、補題の等式を得る。 □

補題 4.2

$$\begin{bmatrix} m+1 \\ i+1 \end{bmatrix} = m! \sum_{j=i}^{m} \frac{1}{j!} \begin{bmatrix} j \\ i \end{bmatrix}$$

証明 $\left[\begin{smallmatrix} m+1 \\ i+1 \end{smallmatrix}\right] = m! \sum_{j=0}^{m} \left[\begin{smallmatrix} j \\ i \end{smallmatrix}\right] / j!$ が成立することが知られている（[3, §6.1]）。$0 \le j < i$ に対して $\left[\begin{smallmatrix} j \\ i \end{smallmatrix}\right] = 0$ から、補題の等式を得る。 □

命題 4.3 $2 \le n$ と $1 \le m < 2^{n-1}$ の任意の n と m に対して、n 要素集合上のサイズ m の分離族のうち、ちょうど１つの成分からなる分割を持たないものの個数 $\sigma_{n,m}$ は

$$\sigma_{n,m} = \frac{(n-1)!}{m!} \sum_{i=1}^{m} (-1)^{m-i} \begin{bmatrix} m+1 \\ i+1 \end{bmatrix} \binom{2^i - 1}{n-1}$$

で与えられる。

証明 補題 4.1 と 4.2 から、以下のように計算される。

$$\begin{aligned}
\sigma_{n,m} &= \sum_{j=1}^{m} (-1)^{m-j} \tau_{n,j} \\
&= (n-1)! \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{j} \frac{(-1)^{m-i}}{j!} \begin{bmatrix} j \\ i \end{bmatrix} \binom{2^i - 1}{n-1} \\
&= (n-1)! \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=i}^{m} \frac{(-1)^{m-i}}{j!} \begin{bmatrix} j \\ i \end{bmatrix} \binom{2^i - 1}{n-1} \\
&= (n-1)! \sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^{m-i}}{m!} \begin{bmatrix} m+1 \\ i+1 \end{bmatrix} \binom{2^i - 1}{n-1}
\end{aligned}$$

□

第１行目と第１列目がすべて０であるサイズ $n \times m$ の $(0,1)$ 行列全体と、第１行目と第１列目がすべて０であるサイズ $m \times n$ の $(0,1)$ 行列全体は、行列の転置操作によって１対１に対応する。これは、以下の例のように、２分割の並びの間の１対１対応を誘導する。

例 3 $S = \{1,2,3,4\}$ とせよ。例 *1* で与えられた２分割からなる組 $P = (\{S\}, P_1, P_2)$ に対して、

$$M_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_P^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を得る。したがって、集合 $S' = \{1,2,3\}$ 上の２分割の４組

$$(\{S'\},\ \{\{1,2\},\{3\}\},\ \{\{1,3\},\{2\}\},\ \{\{1\},\{2,3\}\})$$

を得る。

補題 4.4 $2 \le n$ と $2 \le m \le 2^{n-1}$ の任意の数 n と m に対して、$\sigma_{n,m-1}\,(m-1)! = \sigma_{m,n-1}\,(n-1)!$ が成立する。

証明 第１行目と第１列目がすべて０で、相異なる $(0,1)$ 行ベクトル、相異なる $(0,1)$ 列ベクトルからなる行列は、転置しても同じ性質を満たす。そのようなサイズ $n \times m$ の行列は、$\sigma_{n,m-1}\,(m-1)!$ 通りあり、サイズ $m \times n$ の行列は $\sigma_{m,n-1}\,(n-1)!$ ある。両者の行列の個数は一致するので、補題の等式を得る。 □

命題 4.3 と補題 4.4 から、以下の命題を得る。

命題 4.5 $2 \le n$ と $1 \le m < 2^{n-1}$ の任意の数 n, m に対して、n 要素集合上でサイズ m の分離族のうち、ちょうど１つの成分からなる分割を持たないものの個数 $\sigma_{n,m}$ は

$$\sigma_{n,m} = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-1-i} \begin{bmatrix} n \\ i+1 \end{bmatrix} \binom{2^i - 1}{m}$$

で与えられる。

証明

$$\begin{aligned}
\sigma_{n,m} &= \frac{(n-1)!}{m!} \sigma_{m+1,n-1} \\
&= \frac{(n-1)!}{m!} \frac{m!}{(n-1)!} \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-1-i} \begin{bmatrix} n \\ i+1 \end{bmatrix} \binom{2^i - 1}{m}.
\end{aligned}$$

□

補題 4.1 と命題 4.5 から、以下の定理を得る。

定理 4.6 $2 \leq n$ と $2 \leq m < 2^{n-1}$ の任意の数 n と m に対して、n 要素集合上でサイズ m の分離族の個数 $\tau_{n,m}$ は

$$\tau_{n,m} = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-1-i} \begin{bmatrix} n \\ i+1 \end{bmatrix} \binom{2^i}{m}$$

で与えられる。

証明

$$\begin{aligned} \tau_{n,m} &= \sigma_{n,m} + \sigma_{n,m-1} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-1-i} \begin{bmatrix} n \\ i+1 \end{bmatrix} \left\{ \binom{2^i - 1}{m} + \binom{2^i - 1}{m-1} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-1-i} \begin{bmatrix} n \\ i+1 \end{bmatrix} \binom{(2^i - 1) + 1}{m}. \end{aligned}$$

□

謝辞

本研究は第 14 回 Korean Workshop on Computational Geometry 2011 で始まった。ワークショップを主催した岡本吉央先生に感謝の意を表する。Peter Braß先生には有益なご助言を頂いた。沼田泰英氏には間違いを指摘して頂いた。立木秀樹先生には有益なご助言を頂いた。

参考文献

[1] M. Aigner. *Combinatorial Search.* John Wiley & Sons, 1988.

[2] C. Berge. *Principles of Combinatorics.* Academic Press, 1971.

[3] R. Graham, D. Knuth, and O. Patashnik. *Concrete Mathematics.* Addison-Wesley Professional, 2nd edition, 1994.

[4] G. Katona. Combinatorial search problems. In J. Srivastava, F. Harary, C. Rao, G.-C. Rota, and S. Shrikhande, editors, *A Survey of Combinatorial Theory*, pages 285–308. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, Netherlands, 1973.

[5] G. Katona. Rényi and the combinatorial search problems. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hugarica*, 26:363–378, 1991.

[6] Z. Kohavi and N. Jha. *Switching and Finite Automata Theory.* Cambridge University Press, 3rd edition, 2010.

[7] A. Rényi. On the theory of random search. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 71:809–828, 1965.